



TITLE:

非可換不変式論(ホップ代数学とその周辺)

AUTHOR(S):

寺西, 鎮男

CITATION:

寺西, 鎮男. 非可換不変式論(ホップ代数学とその周辺). 数理解析研究所講究録 1987, 608: 127-138

ISSUE DATE:

1987-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99714>

RIGHT:

非可換不変式論

名大. 理. 寺西 鎮 男

(Yasuo Teranishi)

以下では, K : 標数零の体 V : K 上の有限次元ベクトル空間, G : $GL(V)$ の部分群とする.

群 G の V への自然な作用は, V の tensor algebra $K\langle V \rangle$ への作用に拡張される:

$$K\langle V \rangle = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots,$$

ここで $V^{\otimes n}$: V の n 回 tensor 積.

tensor algebra $K\langle V \rangle$ の G による fixed ring を $K\langle V \rangle^G$ であらわす. Dicks-Formanek [2] と Kharchenko [3] は独立に次の事を証明した: 定理 1 (Dicks-Formanek, Kharchenko)

G が有限群のとき

$K\langle V \rangle^G$ が有限生成

$\Leftrightarrow G$ が $K\langle V \rangle$ に scalar 倍として作用する.

従って G の作用が trivial な場合を除いては, $K\langle V \rangle^G$ は有限生成にはならず, この事は,

E. Noether による 可換環の場合の 次の定理
と比較すると面白い.

定理2 (E. Noether) G が有限群のとき, V 上の
多項式環 $K[V]$ の G による fixed ring $K[V]^G$ は
有限生成である.

定理1 が もっと一般の群に対して成立するか
否かも 筆者は知りませんが, 後に (5.2)
古典的な不変式論の 非可換版に対して
成立することも示します.

定理1 と 並んで, 可換不変式論の場合と
比較して, いちいちしい現象は 次の定理です.

定理3, (Lane [4], Kharchenko [3])

G が $GL(V)$ の かつ な 部分群 のとき, $K\langle V \rangle^G$ は
 K 上の free associative algebra である.

§1. Kharchenko の 問題

定理 1 によって "ほとんど" の場合 $K\langle V \rangle^G$ は有限生成にならないのであるが, Kharchenko は, 次の問題も提出した:

n 次 対称群 S_n は $V^{\otimes n}$ の上に, place permutation として作用する. このとき, 良く知られている様に, S_n の作用と $GL(V)$ の作用は commute しているので, $K\langle V \rangle_n^G (= K\langle V \rangle^G \cap V^{\otimes n})$ に S_n は作用する. Kharchenko の問題というのは, 次の主張は正しいか? ということを問うものです:

『 G が有限群のとき, 有限個の $K\langle V \rangle^G$ の元が存在して, それらの生成する環を R としたとき, S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって R を動かしたとき, $K\langle V \rangle^G$ の元がすべて得られる.』

実際, 上の主張はかなり一般的に正しく, 次の定理が Capelli の恒等式を用いて比較的容易に証明されます.

定理 4. G が linearly reductive な群のとき, Kharchenko の主張『...』は正しい.

§2. 非可換(古典的) 不変式論

19世紀の不変式論では、もっぱら n -ary form
の不変式論が考察された。ここでは、その非可換
版を取り扱う。次数 r の n -ary form

$$f = \sum \frac{r!}{r_1! \cdots r_n!} a_{r_1 \cdots r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}, \quad r_1 + \cdots + r_n = r$$

を考える。

変数 x_1, \dots, x_n から一次変換

$$x_i = \sum g_{ij} x'_j \quad g = (g_{ij}) \in SL(n, k)$$

を受けた時、 n -ary form f は次の形に変形
される:

$$f' = \sum \frac{r!}{r_1! \cdots r_n!} a'_{r_1 \cdots r_n} x'_1{}^{r_1} \cdots x'_n{}^{r_n}.$$

斉次多項式 $J(a_{r_1 \cdots r_n}) \in K[a_{r_1 \cdots r_n}]$ が

$$(*) \quad J(g(a_{r_1 \cdots r_n})) = J(a_{r_1 \cdots r_n}),$$

$$\text{ただし } g(a_{r_1 \cdots r_n}) = a'_{r_1 \cdots r_n}$$

を満たすとき $J(a_{r_1 \cdots r_n})$ は不変式であるとい

う。1890年頃、D. Hilbert は不変式のなす環

$K[a_{r_1 \cdots r_n}]^{SL(n)}$ は有限生成であるという有名な

定理を証明した。ここではこの古典的

な不変式論の非可換版を考えよう。以下では、

$K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ で a_1, \dots, a_n 達で生成された free associative algebra をあらわすことにする。 $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ は自然に graded ring になる

$$K\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} K\langle a_1, \dots, a_n \rangle_d.$$

$K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ の homogeneous な元 $f(a_1, \dots, a_n)$ が条件 (X) を満足するとき、非可換不変式ということにする。このとき非可換不変式全体は graded ring になり

$$K\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{SL(n)} = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} K\langle a_1, \dots, a_n \rangle_d^{SL(n)},$$

$$(K\langle a_1, \dots, a_n \rangle_d^{SL(n)} = K\langle a_1, \dots, a_n \rangle_d^{SL(n)} \cap K\langle a_1, \dots, a_n \rangle_d)$$

と分解する。

定理2 により、非可換不変式環 $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ は K 上の free associative algebra になる。我々の目的は、 $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ の free generating set を具体的に求める事である。

2.1. $GL(n)$ の表現

ここでは、後に用いるために、 $GL(n)$ の表現に関する基本的な事柄をまとめておく

以下

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$: 深さ n の Young diagram

Y_λ : shape が λ の Young tableau

$w(Y_\lambda)$: weight of Y_λ

(Y_λ が 1 を i_1 個 2 を i_2 個, etc. 含む時
数えられ (i_1, i_2, \dots) が Y_λ の weight になる)

$K(n, r, d)$: 深さ n の 長方形の $\underbrace{\text{column strict な}}_{\text{d}}$ Young tableaux
で weight が $(\underbrace{r, \dots, r}_d)$ の
もののなす集合

とする.

例. $K(2, 2, 4)$ は 次の Young tableaux が 5 なる:

$$Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad Y_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Littlewood - Richardson rule を用いると,
容易に 次の proposition が得られる

Prop. 1.

$$\dim K \langle a_1, \dots, a_n \rangle_d^{SL(n)} = |K(n, r, d)|$$

2.2. $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{SL(n)}$ の free generating set の構成

V を K 上の n 次元ベクトル空間として $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を V の基底とする. $S^r(V)$ で V の r 回対称テンソルの空間を現わすとき 写像:

$$\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n} \longmapsto a_{r_1 \dots r_n} \quad (r_1 + \cdots + r_n = r)$$

は $SL(n)$ -isomorphism $\varphi: K\langle S^r(V) \rangle \rightarrow K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$

をひきおこす. k_1, \dots, k_n, d を不等式

$k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq d$ を満足する自然数とする.

④ $K[V]$ の tensor $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ を次の様に定める:

$$\langle k_1, \dots, k_n \rangle := \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot 1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(2)} \\ \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(n)} \otimes \cdots \otimes 1,$$

ここで σ は $\{1, 2, \dots, n\}$ の置換すべてにわたり, $\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}$ はそれぞれ k_1 -番目, k_2 -番目, \dots , k_n -番目の場合にあてられ, その他の場合はすべて 1 である.

定義から $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ は $SL(n)$ の作用で不変である.

$K(n, r, d)$ の 元

$$\begin{bmatrix} i_1 & j_1 & \cdots & m_1 \\ i_2 & j_2 & \cdots & m_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ i_n & j_n & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

に対して、

$$\langle i_1, \dots, i_n \rangle \langle j_1, \dots, j_n \rangle \cdots \langle m_1, \dots, m_n \rangle$$

を考える. Y は 数字 $1, 2, \dots, d$ を 各々 r 回ずつ
ふくむので、これは、 $\bigotimes^d S^r(V)$ の 中の tensor τ
ある. 今、

$$F(Y, a) := \varphi(\langle i_1, \dots, i_n \rangle \langle j_1, \dots, j_n \rangle \cdots \langle m_1, \dots, m_n \rangle)$$

とおくと、 $F(Y, a)$ は、 $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ の (非可換) 不変
式である. この様に (て $K(n, r, d)$ の 各 Y
に対して、不変式 $F(Y, a)$ が構成できる.
さらに、これらの不変式は一次独立であること
が証明でき、従って次の定理を得る.

定理 5. 不変式の集合 $\{F(Y, a), Y \in K(n, r, d)\}$
は、 d 次の不変式のなすベクトル空間 $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle_d^{SL(n)}$

の基底である。

例. (Almkvist, Dicks and Formanek [])

r 次の binary form

$$f = \sum \binom{r}{k} a_k x_1^k x_2^{r-k}$$

を考える. $\mathcal{K}(2, r, 2)$ は 唯一つの元

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline \end{array}$$

を持つ.

従って 次数 2 の 不変式' は

$$\begin{aligned} F(Y, a) &= \varphi((\alpha_1 \otimes \alpha_2 - \alpha_2 \otimes \alpha_1)^n) \\ &= \sum (-1)^{r-k} \binom{r}{k} a_k a_{r-k} \end{aligned}$$

で与えられる.

$Y_1 \in K(n, r, d_1)$, $Y_2 \in K(n, r, d_2)$ に対して $K(n, r, d_1+d_2)$ の元 $Y_1 \hat{\oplus} Y_2$ を次の様にして定義する:

Y_1 に右から Y_2 をつけ加えて、 Y_2 の各元 i を $i+d_1$ で置きかえる。

例へば、

$$Y_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

の時、

$$Y_1 \hat{\oplus} Y_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ \hline \end{array}.$$

演算 $\hat{\oplus}$ は、非可換だが、associative であることが、直ちにわかる。定義から、

$$F(Y_1 \hat{\oplus} Y_2, a) = F(Y_1, a) F(Y_2, a)$$

となるので、 $F(Y_1 \hat{\oplus} Y_2, a)$ は次数のより低い不変式の積として書きあらわすことができる。そこで次の用語を定義しよう。

Young tableau $Y \in K(n, r, d)$ は $Y = Y_1 \hat{\oplus} Y_2$, と
 $(Y_1 \in K(n, r, d_1), Y_2 \in K(n, r, d_2), d = d_1 + d_2, d_1, d_2 \geq 1)$

書くことができる時, 分解可能 そうでない時
分解不能 であるという.

そこで, 目標であった 次の定理 が得られる:

定理 6. 分解不能なすべての Young tableaux
に対応する 不変式 $F(Y, a)$ 達は, $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{SL(n)}$
の free generating set になる.

分解不能な Young tableaux はいくつでも
存在するので, 次の定理 が得られる:

定理 7. 非可換 不変式 環 $K\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{SL(n)}$
は 有限生成 でない.

証明等 は すべて, 省略 すること になっ
てしま, たが それらについては, 筆者の論文 [6]
を見て いただき たい.

References

1. G. Almkvist, W. Dicks and E. Formanek, Hilbert series of fixed free algebra and noncommutative classical invariant theory, *J. Algebra* 93 (1985), 189 - 214
2. W. Dicks and E. Formanek, Poincaré series and a problem of S. Montgomery, *Linear and Multilinear Algebra* 12 (1982), 21 - 30
3. V.K. Kharchenko, Algebra of invariants of free algebras, *Algebras i Logika* 17 (1978), 478 - 487 (in Russian); English translation: *Algebra and Logic* 17 (1978), 316 - 321
4. I.G. Lane, Free algebras of rank two and their automorphisms, Ph.D. thesis, Bedford College, London, 1976.
5. E. Formanek and A.H. Schofield, Groups acting on the ring of two 2×2 generic matrices and a coproduct decomposition of its trace ring, *Proc. of the A.M.S.* Volume 95, Number 2, 1985
6. Y. Teranishi, Noncommutative classical invariant theory (preprint)